数理解析研究所講究録
第 1635 巻 2009 年 60-76

完備半順序集合の層に関する双極限の構成 [1]

倉田俊彦 (Toshihiko Kurata)
法政大学経営学部
東京都千代田区富士見 2-17-1

Faculty of Business Administration, Hosei University
Fujimi 2-17-1, Chiyoda-ku, Tokyo 102-8160, Japan
kurata@i.hosei.ac.jp

概要

高階直観主義論理のモデルを与える構造として層の概念 [4, 6, 10] が知られているが，この枠組みを用いて，基本的な型付ラムダ計算 [7, 8] の構文の解釈を与え「弱外延性を排除したプログラム意味論」を展開することが可能となる．一方で，型無ラムダ計算 [3] などの強力な構文に対して機能する意味論の枠組みとして完備半順序集合の概念 [1, 5] が広く知られている．こうした背景の下で，両者を組み合わせて，新たに「完備半順序集合の層」の概念を導入する．また,「それらが well-pointed でない cartesian closed category を構成すること」や「従来の双極限の構成方法を拡張して，連続関手の不動点となる層を構成できること」などを確認する．[2, 9] で考察されているように，こうした特徴から，必然的に，ラムダモデルでないラムダ代数の構成が誘導される．

1. 完備半順序集合の層

dcpo とその間の連続関数から構成される category を **Cpos** と表す．そして，通常の sheaf の定義に従い，位相空間 $(X, \mathcal{O}X)$ に対して，その位相に基づく順序集合の category $\mathcal{O}X$ から **Cpos** への反変関手 $F \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}^{\mathcal{O}X^{\mathrm{op}}})$ を dcpo の pre-sheaf と呼ぶ．また，通常の sheaf の記法に従って，$V \subseteq U$ を満たす $U, V \in \mathcal{O}X$ に対して，category $\mathcal{O}X^{\mathrm{op}}$ において U から V に存在する唯一の射に F を適用して得られる連続関数を $F_{V,U}$ と表すことにする．

開集合 $U \in \mathcal{O}X$ とその開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i \in \mathcal{O}X \mid i \in I\}$ が与えられた時に，$a \in F(U)$ に対して $\delta_{F,\mathcal{U}}(a) = \langle F_{U_i,U}(a) : i \in I \rangle$ のように $F(U)$ から $\prod_{i\in I} F(U_i)$ への連続関数 $\delta_{F,\mathcal{U}}$ を定義して，$s \in \prod_{i\in I} F(U_i)$ に対して $\lambda_{F,\mathcal{U}}(s) = \langle F_{U_i\cap U_j,U_i}(s_i) :$

[1]Supported in part by Grant-in-Aid for Young Scientists (B) (19700012).

$(i,j) \in I^2 \rangle$, $\rho_{F,\mathcal{U}}(s) = \langle F_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j) : (i,j) \in I^2 \rangle$ のように $\prod_{i \in I} F(U_i)$ から $\prod_{(i,j) \in I^2} F(U_i \cap U_j)$ への連続関数 $\lambda_{F,\mathcal{U}}$, $\rho_{F,\mathcal{U}}$ を定義する．そして，あらゆる U と $\mathcal{U}$ の組み合わせに対して，

$$F(U) \xrightarrow{\delta_{F,\mathcal{U}}} \prod_{i \in I} F(U_i) \underset{\rho_{F,\mathcal{U}}}{\overset{\lambda_{F,\mathcal{U}}}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j) \in I^2} F(U_i \cap U_j)$$

が category **Cpos** における equalizer diagram となる時に F を dcpo の sheaf と呼ぶことにする．この条件は，$s \in \prod_{i \in I} F(U_i)$ に対して，各 $i, j \in I$ で $F_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = F_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j)$ が成り立つ時には，s の各成分を貼り合わせて U 上の section を構成できることを意味している．実際に，$\prod_{i \in I} F(U_i)$ の中で compatible な要素を集めた集合

$$\{ s \in \prod_{i \in I} F(U_i) \mid \lambda_{F,\mathcal{U}}(s) = \rho_{F,\mathcal{U}}(s) \}$$

を $\mathrm{Com}\big(\prod_{i \in I} F(U_i)\big)$ と略記した時に，F が dcpo の sheaf であることは，category **Cpos** において $\delta_{F,\mathcal{U}}$ が同型対応

$$F(U) \simeq \mathrm{Com}\big(\prod_{i \in I} F(U_i)\big)$$

を保証することに他ならない．つまり，$\delta_{F,\mathcal{U}}$ の inverse となる連続関数 $\varepsilon_{F(\mathcal{U})}$ が存在し，各 $s \in \mathrm{Com}\big(\prod_{i \in I} F(U_i)\big)$ に対して，$\varepsilon_{F,\mathcal{U}}(s) \in F(U)$ は，$F_{U_i, U}$ を適用することによって s_i が得られる唯一の section となる．

なお，上の考察において，$\mathrm{Com}\big(\prod_{i \in I} F(U_i)\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos})$ であることは以下の補題から確認できる．

補題 1. $\mathrm{Com}\big(\prod_{i \in I} F(U_i)\big)$ は dcpo であり，任意の $i \in I$ と有向部分集合 $A \subseteq \mathrm{Com}\big(\prod_{i \in I} F(U_i)\big)$ に対して，$(\bigsqcup^{\uparrow} A)_i = \bigsqcup^{\uparrow}(A_i)$ が成り立つ．

証明. 任意の $i, j \in I$ に対して，関数 $F_{U_i \cap U_j, U_i}, F_{U_i \cap U_j, U_j}$ の連続性と A の各要素の compatibility より

$$\begin{aligned} F_{U_i \cap U_j, U_i}(\textstyle\bigsqcup^{\uparrow} A_i) &= \textstyle\bigsqcup^{\uparrow} \{ F_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) \mid s \in A \} \\ &= \textstyle\bigsqcup^{\uparrow} \{ F_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j) \mid s \in A \} \\ &= F_{U_i \cap U_j, U_j}(\textstyle\bigsqcup^{\uparrow} A_j) \end{aligned}$$

が成り立つ．従って $\langle \bigsqcup^{\uparrow}(A_i) : i \in I \rangle \in \mathrm{Com}\big(\prod_{i \in I} F(U_i)\big)$ であり，これが A の上限となることは明らかである．□

対象を dcpo の sheaf のみに制限して得られる $\mathbf{Cpos}^{\mathcal{O}X^{\mathrm{op}}}$ の full subcategory を $\mathbf{Cpos}(X)$ と表記する．この category $\mathbf{Cpos}(X)$ における射 $f \in$

$\mathbf{Cpos}(X)(F, G)$ は F から G への natural transformation であり，各 $U \in \mathcal{O}X$ で $f_U \in \mathbf{Cpos}(F(U), G(U))$ となる．そして，$f, g \in \mathbf{Cpos}(X)(F, G)$ について，各 $U \in \mathcal{O}X$ で $f_U \sqsubseteq g_U$ が dcpo $\mathbf{Cpos}(F(U), G(U))$ において成り立つ時に $f \sqsubseteq g$ と定義する．これによって natural transformation の間にも自然な順序関係を考えることが可能となり，その下で $\mathbf{Cpos}(X)(F, G)$ もまた dcpo となることが証明できる．

補題 2. 任意の $F, G \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}(X))$ に対して，$\mathbf{Cpos}(X)(F, G)$ は dcpo となる．特に，任意の有向部分集合 $A \subseteq \mathbf{Cpos}(X)(F, G)$ と $U \in \mathcal{O}X$ に対して $(\bigsqcup^{\uparrow} A)_U = \bigsqcup^{\uparrow} A_U$ が成り立つ．

証明. A_U が $\mathbf{Cpos}(F(U), G(U))$ の有向部分集合となることは明らかであり，その上限となる連続関数 $\bigsqcup^{\uparrow} A_U \in \mathbf{Cpos}(F(U), G(U))$ を得ることができる．更に，$V \subseteq U$ を満たす $U, V \in \mathcal{O}U$ と $a \in F(U)$ に対して，$G_{V,U}$ の連続性と A の各元の naturality から

$$
\begin{aligned}
G_{V,U} \circ (\textstyle\bigsqcup^{\uparrow} A_U)(a) &= \textstyle\bigsqcup^{\uparrow} \{G_{V,U} \circ f_U(a) \mid f \in A\} \\
&= \textstyle\bigsqcup^{\uparrow} \{f_V \circ F_{V,U}(a) \mid f \in A\} \\
&= (\textstyle\bigsqcup^{\uparrow} A_V) \circ F_{V,U}(a)
\end{aligned}
$$

が $\mathbf{Cpos}$ で保障される．従って，$\langle \bigsqcup^{\uparrow} A_U : U \in \mathcal{O}X \rangle$ は natural transformation となり，これが A の上限となることは明らかである． □

次に，通常の sheaf と同様に定義された演算の下で，category $\mathbf{Cpos}(X)$ が cartesian closed category となることを確認したい．

終対象に相当する sheaf 1 については，各 $U \in \mathcal{O}X$ に対して $1(U)$ を自明な dcpo $\{*\}$ として，$V \subseteq U$ を満たす $U, V \in \mathcal{O}X$ に対して $1_{V,U} = \mathrm{id}_{\{*\}}$ とすることによって定義される．実際に $1 \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}(X))$ となることは容易に確認することができる．

終対象に関係する射の演算として，任意の $F \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}(X))$ に対して unit $\bigcirc \in \mathbf{Cpos}(X)(F, 1)$ は，$U \in \mathcal{O}X$ で $\bigcirc_U(a) = *$ となる natural transformation として与えられる．

$F, G \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}(X))$ に対して，それらの直積に相当する sheaf $F \times G$ は，各 $U \in \mathcal{O}X$ に対して $(F \times G)(U) = F(U) \times G(U)$ とし，$V \subseteq U$ を満たす $U, V \in \mathcal{O}X$ に対して $(F \times G)_{V,U} = F_{V,U} \times G_{V,U}$ として定義される．実際に，開集合 $U \in \mathcal{O}X$ とその開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i \in \mathcal{O}X \mid i \in I\}$ が与えられた時に，

$\langle\, (s_i, t_i) \;:\; i \in I \,\rangle \in \mathrm{Com}(\prod_{i\in I}(F \times G)(U_i))$ に対して

$$(\varepsilon_{F,\mathcal{U}}\langle\, s_i \;:\; i \in I\,\rangle,\ \varepsilon_{G,\mathcal{U}}\langle\, t_i \;:\; i \in I\,\rangle)^2$$

を対応させる関数を $\varepsilon_{F\times G,\mathcal{U}}$ とすると，$\varepsilon_{F\times G,\mathcal{U}}$ が $\delta_{F\times G,\mathcal{U}}$ の inverse となることが容易に確認できる．こうして $F \times G \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}(X))$ となることが分かる．

直積に関係する射の演算として，projection $\mathrm{p} \in \mathbf{Cpos}(X)(F \times G, F)$ は，各 $U \in \mathcal{O}X$ で $\mathrm{p}_U(a, b) = a$ となる natural transformation として与えられ，projection $\mathrm{q} \in \mathbf{Cpos}(X)(F \times G, G)$ も同様の定義によって与えられる．更に，$f \in \mathbf{Cpos}(X)(H, F)$ と $g \in \mathbf{Cpos}(X)(H, G)$ に対して pairing $\langle f, g\rangle \in \mathbf{Cpos}(X)(H, F \times G)$ は，各 $U \in \mathcal{O}X$ で $\langle f, g\rangle_U = \langle f_U, g_U\rangle$ となる natural transformation として与えられる．

$F, G \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}(X))$ に対して，それらの冪に相当する sheaf G^F は，各 $U \in \mathcal{O}X$ に対して $G^F(U) = \mathbf{Cpos}(U)(F|_U, G|_U)$ とし，$V \subseteq U$ を満たす $U, V \in \mathcal{O}X$ と $f \in G^F(U)$ に対して $(G^F)_{V,U}(f) = f|_V$ として定義される．なお，$F|_U$ は F を自然に制限して得られる $\mathcal{O}U^{\mathrm{op}}$ から $\mathbf{Cpos}$ への関手を表していて，$f|_V \in \mathbf{Cpos}(V)(F|_V, G|_V)$ は，各 $W \in \mathcal{O}V$ に対して $(f|_V)_W = f_W$ のように f を制限して得られる natural transformation を表している．実際に，$G^F \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}(X))$ となることは以下の補題によって証明される．

補題 3. 任意の $F, G \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}(X))$ に対して $G^F \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}(X))$ が成り立つ．

証明. 補題 2 により，各 $U \in \mathcal{O}X$ に対して $G^F(U)$ が dcpo であることは保証されていて，G^F が dcpo の pre-sheaf であることも容易に確認できる．従って，G^F が dcpo の sheaf であることを証明するには，任意の $U \in \mathcal{O}X$ とその開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i \in \mathcal{O}X \mid i \in I\}$ に対して，$\delta_{G^F,\mathcal{U}}$ の inverse $\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}$ を与え $G^F(U) \simeq \mathrm{Com}\big(\prod_{i\in I} G^F(U_i)\big)$ を示すことができればよい．

ここで，連続関数 $\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}$ の定義を与えたい．任意の $V \in \mathcal{O}U$ に対して $V \cap \mathcal{U} = \{V \cap U_i \mid i \in I\}$ は V の開被覆であり，$u \in \mathrm{Com}\big(\prod_{i\in I} G^F(U_i)\big)$ と $a \in F(V)$ が与えられた時に $s = \langle (u_i)_{V\cap U_i} \circ F_{V\cap U_i, V}(a) \;:\; i \in I\rangle$ とすると $s \in \mathrm{Com}\big(\prod_{i\in I} G(V \cap U_i)\big)$ となることが分かる．実際に，各 $i, j \in I$ に対して，仮

[2]表記の簡略化のため，$\varepsilon_{F,\mathcal{U}}$ や $\varepsilon_{G,\mathcal{U}}$ を適用する際の括弧は省略している．

定から $u_i|_{U_i\cap U_j} = u_j|_{U_i\cap U_j}$ であり

$$\begin{aligned} G_{V\cap U_i\cap U_j, V\cap U_i}(s_i) &= (u_i)_{V\cap U_i\cap U_j} \circ F_{V\cap U_i\cap U_j, V}(a) \\ &= (u_j)_{V\cap U_i\cap U_j} \circ F_{V\cap U_i\cap U_j, V}(a) \\ &= G_{V\cap U_i\cap U_j, V\cap U_j}(s_j) \end{aligned}$$

が成り立っている．更に，G が sheaf であることから，連続関数 $\varepsilon_{G,V\cap\mathcal{U}}$ の存在が保証されていて，これを用いて $\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}(u)$ の $V \in \mathcal{O}X$ での成分を

$$(\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}(u))_V(a) = \varepsilon_{G,V\cap\mathcal{U}}(s)$$

のように $F(V)$ から $G(V)$ への関数として定義する．

こうして定義された $\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}$ については，任意の有向部分集合 $A \subseteq F(V)$ に対して，$(u_i)_{V\cap U_i}$, $F_{V\cap U_i,V}$, $\varepsilon_{G,V\cap\mathcal{U}}$ の連続性から

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}(u))_V(\textstyle\bigsqcup^{\uparrow} A) \\ &\quad = \varepsilon_{G,V\cap\mathcal{U}}\big(\langle\, (u_i)_{V\cap U_i} \circ F_{V\cap U_i,V}(\textstyle\bigsqcup^{\uparrow} A) : i \in I \,\rangle\big) \\ &\quad = \textstyle\bigsqcup^{\uparrow} \big\{\varepsilon_{G,V\cap\mathcal{U}}\big(\langle\, (u_i)_{V\cap U_i} \circ F_{V\cap U_i,V}(a) : i \in I \,\rangle\big) \mid a \in A \big\} \\ &\quad = \textstyle\bigsqcup^{\uparrow} (\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}(u))_V(A) \end{aligned}$$

が成り立つ．従って，$\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}(u)$ の各成分は連続であることが分かる．更に，$\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}(u)$ の naturality は通常の sheaf に関する議論と同様に証明することができる．従って $\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}(u) \in G^F(U)$ となり $\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}$ は $\prod_{i\in I} G^F(U_i)$ から $G^F(U)$ への関数であることが分かった．

また，任意の有向部分集合 $A \subseteq \mathrm{Com}\big(\prod_{i\in I} G^F(U_i)\big)$ に対して，

$$\begin{aligned} &\big(\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}(\textstyle\bigsqcup^{\uparrow} A)\big)_V(a) \\ &\quad = \varepsilon_{G,V\cap\mathcal{U}}\big(\langle\, (\textstyle\bigsqcup^{\uparrow} A_i)_{V\cap U_i} \circ F_{V\cap U_i,V}(a) : i \in I \,\rangle\big) \\ &\quad = \textstyle\bigsqcup^{\uparrow} \big\{\varepsilon_{G,V\cap\mathcal{U}}\big(\langle\, (u_i)_{V\cap U_i} \circ F_{V\cap U_i,V}(a) : i \in I \,\rangle\big) \mid u \in A \big\} \\ &\quad = \textstyle\bigsqcup^{\uparrow} (\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}(A))_V(a) \\ &\quad = (\textstyle\bigsqcup^{\uparrow} \varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}(A))_V(a) \qquad \text{（補題 2 より）} \end{aligned}$$

であるから $\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}$ は連続であることが分かる．更に，任意の $f \in G^F(U)$, $V \in \mathcal{O}U$, $a \in F(V)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}} \circ \delta_{G^F,\mathcal{U}}(f))_V(a) \\
&\qquad = \varepsilon_{G,V\cap\mathcal{U}}\big(\langle\, (f|_{U_i})_{V\cap U_i} \circ F_{V\cap U_i,V}(a) : i \in I \,\rangle\big) \\
&\qquad = \varepsilon_{G,V\cap\mathcal{U}}\big(\langle\, G_{V\cap U_i,V} \circ f_V(a) : i \in I \,\rangle\big) \\
&\qquad = \varepsilon_{G,V\cap\mathcal{U}} \circ \delta_{G,V\cap\mathcal{U}}(f_V(a)) \\
&\qquad = f_V(a)
\end{aligned}
$$

であることから $\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}} \circ \delta_{G^F,\mathcal{U}}$ が identity となることが分かり，任意の $u \in \mathrm{Com}\big(\prod_{i\in I} G^F(U_i)\big)$, $j \in I$, $V \in \mathcal{O}U_j$, $a \in F(V)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&((\delta_{G^F,\mathcal{U}} \circ \varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}(u))_j)_V(a) \\
&\qquad = (\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}(u)|_{U_j})_V(a) \\
&\qquad = \varepsilon_{G,V\cap\mathcal{U}}\big(\langle\, (u_i)_{V\cap U_i} \circ F_{V\cap U_i,V}(a) \;:\; i \in I \,\rangle\big) \\
&\qquad = \varepsilon_{G,V\cap\mathcal{U}}\big(\langle\, G_{V\cap U_i,V} \circ (u_i)_V(a) \;:\; i \in I \,\rangle\big) \\
&\qquad = \varepsilon_{G,V\cap\mathcal{U}} \circ \delta_{G,V\cap\mathcal{U}}((u_j)_V(a)) \\
&\qquad = (u_j)_V(a)
\end{aligned}
$$

であることから $\delta_{G^F,\mathcal{U}} \circ \varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}$ が identity となることが分かる．以上のことから，$\varepsilon_{G^F,\mathcal{U}}$ は category **Cpos** において $\delta_{G^F,\mathcal{U}}$ の inverse となっていることが分かる． □

冪に関係する射の演算として，evaluation $\mathrm{ev} \in \mathbf{Cpos}(X)(F^G \times G, F)$ は，各 $U \in \mathcal{O}X$ で $\mathrm{ev}_U(f,a) = f_U(a)$ となる natural transformation として与えられる．更に，$f \in \mathbf{Cpos}(X)(F \times G, H)$ に対して，curryfication $\mathrm{Cur}(f) \in \mathbf{Cpos}(X)(F, H^G)$ は，各 $U \in \mathcal{O}X$, $a \in F(U)$, $V \in \mathcal{O}U$, $b \in G(V)$ に対して $(\mathrm{Cur}(f)_U(a))_V(b) = f_V(F_{V,U}(a), b)$ となる natural transformation として与えられる．

実際に，任意の有向部分集合 $B \subseteq G(V)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Cur}(f)_U(a))_V(\textstyle\bigsqcup^{\uparrow} B) &= f_V(F_{V,U}(a), \textstyle\bigsqcup^{\uparrow} B) \\
&= \textstyle\bigsqcup^{\uparrow} f_V(F_{V,U}(a), B) \\
&= \textstyle\bigsqcup^{\uparrow} \big((\mathrm{Cur}(f)_U(a))_V(B)\big)
\end{aligned}
$$

が成り立つことから $(\mathrm{Cur}(f)_U(a))_V$ は $G(V)$ から $H(V)$ への連続関数となる．また，$\mathrm{Cur}(f)_U(a)$ の naturality は，通常の sheaf に関する議論と同様に証明

することができるので，$\mathrm{Cur}(f)_U(a) \in H^G(U)$ となることが分かる．更に，任意の有向部分集合 $A \subseteq F(U)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Cur}(f)_U(\textstyle\bigsqcup^{\uparrow} A))_V(b) &= f_V(F_{V,U}(\textstyle\bigsqcup^{\uparrow} A), b) \\
&= \textstyle\bigsqcup^{\uparrow}(\mathrm{Cur}(f)_U(A))_V(b) \\
&= \left(\textstyle\bigsqcup^{\uparrow}(\mathrm{Cur}(f)_U(A))\right)_V(b) \qquad \text{（補題 2 より）}
\end{aligned}
$$

が成り立つことから $\mathrm{Cur}(f)_U$ は $F(U)$ から $H^G(U)$ への連続関数となる．また，$\mathrm{Cur}(f)$ の naturality も，通常の sheaf に関する議論と同様に証明することができる．

上のように定義された終対象，直積，冪に関係する射の演算は，cartesian closed category に必要な等式を全て満たすことが確認でき，最終的に以下の定理が得られる．

定理 4. $\mathbf{Cpos}(X)$ は cartesian closed category である．

2. 層の拡大列とその双極限

dcpo の sheaf $F, G \in \mathbf{Cpos}(X)$ とそれらの間に定義された 2 つの natural transformation $e \in \mathbf{Cpos}(X)(F,G)$, $p \in \mathbf{Cpos}(X)(G,F)$ に対して，各 $U \in \mathcal{O}U$ で $p_U \circ e_U = \mathrm{id}_{F(U)}$ と $e_U \circ p_U \sqsubseteq \mathrm{id}_{G(U)}$ が成り立つ時に，e を F から G への embedding，p を G から F への projection と呼び，(e,p) を F から G への embedding-projection pair と呼ぶ．また，このように embedding-projection pair が存在する場合に，G を F の拡大と呼ぶことにする．

embedding-projection pair (e,p) に対して，各 $U \in \mathcal{O}X$ で (e_U, p_U) は adjunction を構成しているから，任意の $a \in F(U)$ に対して，$e_U(a) = \mathsf{min}\{b \in G(U) \mid a \sqsubseteq p_U(b)\}$ が成り立ち，任意の $b \in G(U)$ に対して，$p_U(b) = \mathsf{max}\{a \in F(U) \mid e_U(a) \sqsubseteq b\}$ が成り立つ．e が与えられれば p は唯一に定まることとなる．従って，embedding-projection pair (e,p) に関しては，本質的に，一方の射に関する情報があればもう一方の射は一意に定まるわけであるが，ここでは表記の都合上，2 つの射を明示することにしておく．

以後は，射を embedding や projection に限定した議論を展開する機会が多いので，$\mathbf{Cpos}(X)$ の中でそのような特殊な射のみに注目して得られる subcategory を $\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ と表すことにする．厳密には，$\mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}(X))$ として $\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}(F,G)$ は F から G への embedding-projection pair の集合とする．

dcpo の sheaf の拡大列

$$F_0 \xrightarrow{(e_{1\,0},p_{0\,1})} F_1 \xrightarrow{(e_{2\,1},p_{1\,2})} F_2 \xrightarrow{(e_{3\,2},p_{2\,3})} F_3 \cdots$$

を考えた時，$m < n$ を満たす $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$e_{n\,m} = e_{n\,n-1} \circ e_{n-1\,n-2} \circ \cdots \circ e_{m+1\,m}$ と $p_{m\,n} = p_{m\,m+1} \circ p_{m+1\,m+2} \circ \cdots \circ p_{n-1\,n}$ のように略記を行う．また，$e_{n\,n} = p_{n\,n} = \mathrm{id}_{F_n}$ とする．更に，$\mathcal{C} = \{(f_n, q_n) : F_n \to C \mid n \in \mathbb{N}\}$ と $\mathcal{D} = \{(g_n, r_n) : F_n \to D \mid n \in \mathbb{N}\}$ をこの拡大列の cocone として，$U \in \mathcal{O}X, a \in C(U)$ とした時，$m \leq n$ を満たす $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}(g_m)_U \circ (q_m)_U(a) &= (g_n)_U \circ (e_{n\,m})_U \circ (p_{m\,n})_U \circ (q_n)_U(a) \\ &\sqsubseteq (g_n)_U \circ (q_n)_U(a)\end{aligned}$$

が $D(U)$ において成り立つので，$\{g_n \circ q_n : C \to D \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $\mathbf{Cpos}(X)(C, D)$ の有向部分集合となることが分かる．そして，この事実に基づいて，射 $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \in \mathbf{Cpos}(X)(C, D)$ を

$$\mathcal{D}^{\mathcal{C}} = \bigsqcup\nolimits^{\uparrow}\{\, g_n \circ q_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$$

のように定義する．その際，$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ の naturality は g_n と q_n の naturality によって保証されている．

補題 5. $\mathcal{F} = \{(e_{n+1\,n}, p_{n\,n+1}) : F_n \to F_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ を dcpo の sheaf の拡大列として，$\mathcal{C} = \{(f_n, q_n) : F_n \to C \mid n \in \mathbb{N}\}$ を $\mathcal{F}$ の cocone とした時，以下が成り立つ．

(i) $\mathcal{F}$ の任意の cocone $\mathcal{D} = \{(g_n, r_n) : F_n \to D \mid n \in \mathbb{N}\}$ に対して，$\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \circ f_n = g_n$ と $q_n \circ \mathcal{C}^{\mathcal{D}} = r_n$ が成り立つ．

(ii) $\mathcal{C}^{\mathcal{C}} = \mathrm{id}_C$ であれば，$\mathcal{C}$ は $\mathcal{F}$ の colimit となる．そして，$\mathcal{F}$ の任意の cocone $\mathcal{D} = \{(g_n, r_n) : F_n \to D \mid n \in \mathbb{N}\}$ に対して，$(\mathcal{D}^{\mathcal{C}}, \mathcal{C}^{\mathcal{D}})$ が C から D への唯一の mediating arrow となる．

証明. (i) $\mathcal{C}$ が $\mathcal{F}$ の cocone であるという仮定から，$n \leq m$ の時には

$$\begin{aligned}g_m \circ q_m \circ f_n &= g_m \circ q_m \circ f_m \circ e_{m\,n} \\ &= g_m \circ e_{m\,n} \\ &= g_n\end{aligned}$$

となり，$m \leq n$ の時には

$$\begin{aligned}g_m \circ q_m \circ f_n &= g_n \circ e_{n\,m} \circ p_{m\,n} \circ q_n \circ f_n \\ &\sqsubseteq g_n\end{aligned}$$

となる．このことから，$\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \circ f_n = g_n$ は明らかである．また，後者の等式も同様に証明することができる．

(ii) 先ず，

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^{\mathcal{D}} \circ \mathcal{D}^{\mathcal{C}} &= \bigsqcup^{\uparrow}\{f_m \circ r_m \circ g_n \circ q_n \mid m, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigsqcup^{\uparrow}\{f_n \circ r_n \circ g_n \circ q_n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \mathcal{C}^{\mathcal{C}}\end{aligned}$$

であり，仮定から直ちに $\mathcal{C}^{\mathcal{D}} \circ \mathcal{D}^{\mathcal{C}} = \mathrm{id}_C$ が成り立つ．また，同様にして $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \circ \mathcal{C}^{\mathcal{D}} \sqsubseteq \mathrm{id}_D$ を示すこともできる．従って，$(\mathcal{D}^{\mathcal{C}}, \mathcal{C}^{\mathcal{D}})$ が embedding-projection pair であることが分かる．更に，(i) より，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ において $(\mathcal{D}^{\mathcal{C}}, \mathcal{C}^{\mathcal{D}}) \circ (f_n, q_n) = (g_n, r_n)$ が保証される．この mediating arrow $(\mathcal{D}^{\mathcal{C}}, \mathcal{C}^{\mathcal{D}})$ の一意性を確認するために，C から D への embedding-projection pair (f, q) が各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $(f, q) \circ (f_n, q_n) = (g_n, r_n)$ を満たしていると仮定する．すると，

$$\begin{aligned}f &= f \circ \mathcal{C}^{\mathcal{C}} \\ &= \bigsqcup^{\uparrow}\{f \circ f_n \circ q_n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \mathcal{D}^{\mathcal{C}},\end{aligned}$$

となり，同様に $q = \mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ を示すことができるので，$(f, q) = (\mathcal{D}^{\mathcal{C}}, \mathcal{C}^{\mathcal{D}})$ が成り立つ． □

補題 5 (ii) については逆の主張も成り立ち，これによって，拡大列の cocone の中で colimit を特徴付ける性質が得られる．

補題 6. $\mathcal{F} = \{(e_{n+1\,n},\ p_{n\,n+1}) : F_n \to F_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ を dcpo の sheaf の拡大列として，$\mathcal{C} = \{(f_n,\ q_n) : F_n \to C \mid n \in \mathbb{N}\}$ を $\mathcal{F}$ の colimit とした時，$\mathcal{C}^{\mathcal{C}} = \mathrm{id}_C$ が成り立つ．

証明. 各 $U \in \mathcal{O}X$ に対して $\hat{C}(U) = (\mathcal{C}^{\mathcal{C}})_U(C(U))$ として，$V \subseteq U$ を満たす $U, V \in \mathcal{O}X$ に対して $\hat{C}_{V,U} = C_{V,U}|_{\hat{C}(U)}$ とする．こうして，sheaf $\hat{C} \in \mathbf{Cpos}(X)$ を定義する．すると，$C(U)$ の要素に $(\mathcal{C}^{\mathcal{C}})_U$ を適用した結果は常に $\hat{C}(U)$ の要素となるので，$\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ の codomain を $\hat{C}$ に制限して自然な形で C から $\hat{C}$ への射を導入することができる．そして，混乱の恐れも少ないので，このように $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ の codomain を $\hat{C}$ に制限して得られる射についても，同じ表記で $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ と記述することにする．

こうした準備の下で,

$$\hat{\mathcal{C}} = \{(\mathcal{C}^{\mathcal{C}} \circ f_n,\ q_n \circ i) :\ F_n \to \hat{C} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

として，新たに $\mathcal{F}$ の cocone を考える．ここで，i は $\hat{C}$ から C への射で，各 $U \in \mathcal{O}X$ に対して i_U が inclusion となるような natural transformation を表しているとする．

すると，任意の $U \in \mathcal{O}X$ と $(\mathcal{C}^{\mathcal{C}})_U(a) \in \hat{C}(U)$ に対して

$$\begin{aligned}
&(\hat{\mathcal{C}}^{\hat{\mathcal{C}}})_U \circ (\mathcal{C}^{\mathcal{C}})_U(a) \\
&\quad = \bigsqcup{}^{\uparrow}\{(\mathcal{C}^{\mathcal{C}} \circ f_n)_U \circ (q_n \circ i)_U \circ (\mathcal{C}^{\mathcal{C}})_U(a) \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&\quad = \bigsqcup{}^{\uparrow}\{(f_n)_U \circ (q_n)_U \circ (f_n)_U \circ (q_n)_U \circ i_U \circ (f_n)_U \circ (q_n)_U(a) \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&\quad = \bigsqcup{}^{\uparrow}\{(f_n)_U \circ (q_n)_U(a) \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&\quad = (\mathcal{C}^{\mathcal{C}})_U(a)
\end{aligned}$$

となるので，$\hat{\mathcal{C}}^{\hat{\mathcal{C}}} = \mathrm{id}_{\hat{C}}$ が成り立つ．従って，補題 5 (ii) より，$\hat{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{F}$ の colimit となり，$(\mathcal{C}^{\hat{\mathcal{C}}}, \hat{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}})$ が $\hat{C}$ から C への mediating arrow となる．

一方で，$\mathcal{C}$ も $\mathcal{F}$ の colimit であったから，C から $\hat{C}$ への mediating arrow も存在し，これを (g, r) とすると，$\mathcal{C}^{\hat{\mathcal{C}}} \circ g = \mathrm{id}_C$ と $r \circ \hat{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \mathrm{id}_C$ が成り立つ．更に，これらの等式と $\hat{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \circ \mathcal{C}^{\hat{\mathcal{C}}} = \mathrm{id}_{\hat{C}}$ から $(g, r) = (\hat{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}, \mathcal{C}^{\hat{\mathcal{C}}})$ が得られ，$\mathcal{C}^{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^{\hat{\mathcal{C}}} \circ \hat{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = r \circ g = \mathrm{id}_C$ が結論付けられる． □

定理 7. $\mathcal{F}$ を dcpo の sheaf の拡大列として $\mathcal{C}$ を $\mathcal{F}$ の cocone とした時，以下が成り立つ．

(i) $\mathcal{C}$ が $\mathcal{F}$ の colimit となることと $\mathcal{C}^{\mathcal{C}} = \mathrm{id}_C$ となることは同値である．

(ii) $\mathcal{C}$ が $\mathcal{F}$ の colimit の時は，$\mathcal{F}$ の任意の cocone $\mathcal{D}$ に対して $(\mathcal{D}^{\mathcal{C}}, \mathcal{C}^{\mathcal{D}})$ が C から D への唯一の mediating arrow となる．

dcpo の sheaf の拡大列 $\mathcal{F} = \{(e_{n+1\,n},\ p_{n\,n+1}) :\ F_n \to F_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ が与えられた時に，各 $U \in \mathcal{O}X$ に対して

$$(\lim \mathcal{F})(U) = \Big\{x \in \prod_{n \in \mathbb{N}} F_n(U) \;\Big|\; \forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n = (p_{n\,n+1})_U(x_{n+1})\Big\}$$

とし，$V \subseteq U$ を満たす $U, V \in \mathcal{O}X$ と $x \in (\lim \mathcal{F})(U)$ に対して

$$(\lim \mathcal{F})_{V,U}(x) = \langle\, (F_n)_{V,U}(x_n)\ :\ n \in \mathbb{N} \rangle$$

とする．こうして dcpo の pre-sheaf $\lim \mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}^{\mathcal{O}X^{\mathrm{op}}})$ を定義する．ここで，$(\lim \mathcal{F})(U) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos})$ であることは dcpo に関する考察において広く知

られていることであり，$(\lim\mathcal{F})_{V,U}(x) \in (\lim\mathcal{F})(V)$ であることは，各 $n \in \mathbb{N}$ で

$$\begin{aligned}(p_{n\,n+1})_V((F_{n+1})_{V,U}(x_{n+1})) &= (F_n)_{V,U}((p_{n\,n+1})_U(x_{n+1}))\\ &= (F_n)_{V,U}(x_n)\end{aligned}$$

が成り立つことから保証されている．更に，以下の補題によって $\lim\mathcal{F}$ が sheaf となることも確認できる．

補題 8. $\mathcal{F} = \{(e_{n+1\,n},\, p_{n\,n+1}) : F_n \to F_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ を dcop の sheaf の拡大列とした時，$\lim\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}(X))$ となる．

証明. 任意の $U \in \mathcal{O}X$ とその開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ に対して，同型

$$(\lim\mathcal{F})(U) \simeq \mathrm{Com}\Big(\prod_{i\in I}(\lim\mathcal{F})(U_i)\Big)$$

を保証する $\delta_{\lim\mathcal{F},\mathcal{U}}$ の逆射 $\varepsilon_{\lim\mathcal{F},\mathcal{U}}$ を与えることができればよく，そのために，$s \in \mathrm{Com}\big(\prod_{i\in I}(\lim\mathcal{F})(U_i)\big)$ と仮定する．すると，各 $i, j \in I$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $(F_n)_{U_i\cap U_j,U_i}((s_i)_n) = (F_n)_{U_i\cap U_j,U_j}((s_j)_n)$ であるから，$\langle\, (s_i)_n : i \in I \,\rangle \in \mathrm{Com}\big(\prod_{i\in I} F_n(U_i)\big)$ が成り立つ．ここで，F_n は dcpo の sheaf であるから，$\mathrm{Com}\big(\prod_{i\in I} F_n(U_i)\big)$ の要素の各成分を貼り合わせる連続関数 $\varepsilon_{F_n,\mathcal{U}}$ が存在し，$\varepsilon_{F_n,\mathcal{U}}\langle\, (s_i)_n : i \in I \,\rangle \in F_n(U)$ となる．このようにして構成される section に対して，各 $n \in \mathbb{N}$ において

$$\begin{aligned}&(p_{n\,n+1})_U \circ \varepsilon_{F_{n+1},\mathcal{U}}\langle\, (s_i)_{n+1} : i \in I \,\rangle\\ &\quad= \varepsilon_{F_n,\mathcal{U}} \circ \delta_{F_n,\mathcal{U}} \circ (p_{n\,n+1})_U \circ \varepsilon_{F_{n+1},\mathcal{U}}\langle\, (s_i)_{n+1} : i \in I \,\rangle\\ &\quad= \varepsilon_{F_n,\mathcal{U}}\langle\, (F_n)_{U_i,U} \circ (p_{n\,n+1})_U \circ \varepsilon_{F_{n+1},\mathcal{U}}\langle\, (s_i)_{n+1} : i \in I \,\rangle : i \in I \,\rangle\\ &\quad= \varepsilon_{F_n,\mathcal{U}}\langle\, (p_{n\,n+1})_{U_i} \circ (F_{n+1})_{U_i,U} \circ \varepsilon_{F_{n+1},\mathcal{U}}\langle\, (s_i)_{n+1} : i \in I \,\rangle : i \in I \,\rangle\\ &\quad= \varepsilon_{F_n,\mathcal{U}}\langle\, (p_{n\,n+1})_{U_i}((s_i)_{n+1}) : i \in I \,\rangle\\ &\quad= \varepsilon_{F_n,\mathcal{U}}\langle\, (s_i)_n : i \in I \,\rangle,\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\varepsilon_{\lim\mathcal{F},\mathcal{U}}(s) = \langle\, \varepsilon_{F_n,\mathcal{U}}\langle\, (s_i)_n : i \in I \,\rangle : n \in \mathbb{N} \,\rangle$$

のように $\varepsilon_{\lim\mathcal{F},\mathcal{U}}(s) \in (\lim\mathcal{F})(U)$ を定義することにする．

こうして定義された $\varepsilon_{\lim\mathcal{F},\mathcal{U}}$ については，$\mathrm{Com}\big(\prod_{i\in I}(\lim\mathcal{F})(U_i)\big)$ の任意の有向部分集合 A に対して，

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\lim\mathcal{F},\mathcal{U}}(\textstyle\bigsqcup^{\uparrow}A) &= \langle\, \varepsilon_{F_n,\mathcal{U}}\langle\, ((\textstyle\bigsqcup^{\uparrow}A)_i)_n : i\in I\,\rangle : n\in\mathbb{N}\rangle \\ &= \langle \textstyle\bigsqcup^{\uparrow} \varepsilon_{F_n,\mathcal{U}}\langle\, (A_i)_n : i\in I\,\rangle : n\in\mathbb{N}\rangle \\ &= \textstyle\bigsqcup^{\uparrow}\langle\, \varepsilon_{F_n,\mathcal{U}}\langle\, (A_i)_n : i\in I\,\rangle : n\in\mathbb{N}\rangle \\ &= \textstyle\bigsqcup^{\uparrow} \varepsilon_{\lim\mathcal{F},\mathcal{U}}(A)\end{aligned}$$

が成り立ち，連続関数となっていることが分かる．また，任意の $x\in(\lim\mathcal{F})(U)$ に対して

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\lim\mathcal{F},\mathcal{U}}\circ\delta_{\lim\mathcal{F},\mathcal{U}}(x) &= \varepsilon_{\lim\mathcal{F},\mathcal{U}}\langle\,\langle\, (F_n)_{U_i,U}(x_n) : n\in\mathbb{N}\rangle : i\in I\,\rangle \\ &= \langle\, \varepsilon_{F_n,\mathcal{U}}\langle\, (F_n)_{U_i,U}(x_n) : i\in I\,\rangle : n\in\mathbb{N}\rangle \\ &= \langle\, x_n : n\in\mathbb{N}\rangle \\ &= x\end{aligned}$$

であることと，任意の $s\in\mathrm{Com}\big(\prod_{i\in I}(\lim\mathcal{F})(U_i)\big)$ に対して

$$\begin{aligned}&\delta_{\lim\mathcal{F},\mathcal{U}}\circ\varepsilon_{\lim\mathcal{F},\mathcal{U}}(s) \\ &\quad= \langle\, (\lim\mathcal{F})_{U_i,U}\langle\, \varepsilon_{F_n,\mathcal{U}}\langle\, (s_i)_n : i\in I\,\rangle : n\in\mathbb{N}\rangle : i\in I\,\rangle \\ &\quad= \langle\,\langle\, (F_n)_{U_i,U}\circ\varepsilon_{F_n,\mathcal{U}}\langle\, (s_i)_n : i\in I\,\rangle : n\in\mathbb{N}\rangle : i\in I\,\rangle \\ &\quad= \langle\,\langle\, (s_i)_n : n\in\mathbb{N}\rangle : i\in I\,\rangle \\ &\quad= s\end{aligned}$$

であることから $\varepsilon_{\lim\mathcal{F},\mathcal{U}}$ が $\delta_{\lim\mathcal{F},\mathcal{U}}$ の inverse となることが分かる． □

$\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ の中で，任意の拡大列 $\mathcal{F}$ に対して sheaf $\lim\mathcal{F}$ を頂点とした colimit diagram を構成することができる．実際に，$\mathcal{F}$ 中の各対象から $\lim\mathcal{F}$ への embedding-projection pair は以下のように与えられる．任意の $m,n\in\mathbb{N}, U\in\mathcal{O}X, a\in F_n(U)$ に対して，$(e_{\mathcal{F}n})_U(a)\in(\lim\mathcal{F})(U)$ の第 m 成分は

$$((e_{\mathcal{F}n})_U(a))_m = \begin{cases}(p_{mn})_U(a) & m\leq n \text{ の時,}\\ (e_{mn})_U(a) & \text{その他の時}\end{cases}$$

のように定義される．また，任意の $n\in\mathbb{N}, x\in(\lim\mathcal{F})(U)$ に対して $(p_{n\mathcal{F}})_U(x)\in F_n(U)$ は

$$(p_{n\mathcal{F}})_U(x) = x_n$$

のように定義される．こうにして導入された $(e_{\mathcal{F}n}, p_{n\mathcal{F}})$ が embedding-projection pair となることは，以下の補題によって確認される．

補題 9. $\mathcal{F} = \{(e_{n+1\,n},\, p_{n\,n+1}) : F_n \to F_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ を dcpo の sheaf の拡大列とした時，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $(e_{\mathcal{F}n},\, p_{n\mathcal{F}})$ は F_n から $\lim \mathcal{F}$ への embedding-projection pair となる．

証明．各 $U \in \mathcal{O}X$ において，$((e_{\mathcal{F}n})_U,\, (p_{n\mathcal{F}})_U)$ が **Cpos** における embedding-projection pair となることは dcpo に関する既知の考察と同様に示すことができる．そこで，$e_{\mathcal{F}n}$ と $p_{n\mathcal{F}}$ の naturality を確認すれば十分である．これについて，$V \subseteq U$ を満たす $U, V \in \mathcal{O}X$ を考えた時，各 $m \in \mathbb{N}$, $a \in F_n(U)$ に対して

$$((\lim \mathcal{F})_{V,U} \circ (e_{\mathcal{F}n})_U(a))_m = \begin{cases} (F_m)_{V,U} \circ (p_{m\,n})_U(a) & m \leq n \text{ の時,} \\ (F_m)_{V,U} \circ (e_{m\,n})_U(a) & \text{その他の時} \end{cases}$$

と

$$((e_{\mathcal{F}n})_V \circ (F_n)_{V,U}(a))_m = \begin{cases} (p_{m\,n})_V \circ (F_n)_{V,U}(a) & m \leq n \text{ の時,} \\ (e_{m\,n})_V \circ (F_n)_{V,U}(a) & \text{その他の時} \end{cases}$$

が成り立ち，$e_{m\,n}$ と $p_{m\,n}$ の naturality から $(\lim \mathcal{F})_{V,U} \circ (e_{\mathcal{F}n})_U = (e_{\mathcal{F}n})_V \circ (F_n)_{V,U}$ が得られる．一方で，各 $x \in (\lim \mathcal{F})(U)$ に対して，

$$\begin{aligned}(F_n)_{V,U} \circ (p_{n\mathcal{F}})_U(x) &= (F_n)_{V,U}(x_n) \\ &= (p_{n\mathcal{F}})_V \circ (\lim \mathcal{F})_{V,U}(x)\end{aligned}$$

となり，$p_{\mathcal{F}n}$ の naturality が得られる． □

以上の考察によって，$\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ 中の拡大列 $\mathcal{F}$ から diagram $\{(e_{\mathcal{F}n}, p_{n\mathcal{F}}) : F_n \to \lim \mathcal{F} \mid n \in \mathbb{N}\}$ が得られた．そして，これを $\mathcal{F}_\infty$ と表すことにすると，$\mathcal{F}_\infty$ が $\mathcal{F}$ の colimit となることが証明できる．

定理 10. $\mathcal{F} = \{(e_{n+1\,n},\, p_{n\,n+1}) : F_n \to F_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ を dcpo の sheaf の拡大列とした時，$\mathcal{F}_\infty$ は $\mathcal{F}$ の colimit となる．また，$\mathcal{D}$ を $\mathcal{F}$ の cocone とした時，$\mathcal{F}_\infty$ から $\mathcal{D}$ への唯一の mediating arrow は $(\mathcal{D}^{\mathcal{F}_\infty}, \mathcal{F}_\infty^{\mathcal{D}})$ で与えられる．

証明．先ず，各 $U \in \mathcal{O}X$, $n \in \mathbb{N}$ に対して $(e_{\mathcal{F}n})_U = (e_{\mathcal{F}n+1})_U \circ (e_{n+1\,n})_U$ と $(p_{n\mathcal{F}})_U = (p_{n\,n+1})_U \circ (p_{n+1\,\mathcal{F}})_U$ が成り立つことは dcpo に関する既知の考察と同様に示すことができる．従って，$\mathcal{F}_\infty$ が $\mathcal{F}$ の cocone であることが分かる．

また，$m \leq n$ を満たす $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$\bigsqcup^{\uparrow}\{(e_{\mathcal{F}n})_U \circ (p_{n\mathcal{F}})_U \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathrm{id}_{(\lim \mathcal{F})(U)}$ が成り立つことも dcpo に関する既知の考察と同様に示すことがで

きるので，補題 2 より，各 $U \in \mathcal{O}X$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}_\infty{}^{\mathcal{F}_\infty})_U &= \left(\bigsqcup^{\uparrow} \{e_{\mathcal{F}n} \circ p_{n\mathcal{F}} \mid n \in \mathbb{N}\} \right)_U \\
&= \bigsqcup^{\uparrow} \{(e_{\mathcal{F}n})_U \circ (p_{n\mathcal{F}})_U \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&= \mathrm{id}_{(\lim \mathcal{F})(U)}
\end{aligned}
$$

が得られる．

以上の結果と定理 7 により，本定理の主張が保証される． □

3. 連続関手とその不動点

α を $\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ から $\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ への関手とした時，$\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ 中の射 (e, p) に α を適用して得られる embedding-projection pair について，embedding に相当する natural transformation を $\alpha_e(e, p)$ と表し，projection に相当する natural transformation を $\alpha_p(e, p)$ と表すことにする．つまり，

$$\alpha(e, p) = (\alpha_e(e, p),\ \alpha_p(e, p))$$

とする．また，$\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ 中の diagram $\mathcal{K} = \{(e, p) : F \to \alpha(F)\}$ に対して，α を繰り返し適用することによって得られる拡大列

$$F \xrightarrow{(e,p)} \alpha(F) \xrightarrow{\alpha(e,p)} \alpha^2(F) \xrightarrow{\alpha^2(e,p)} \alpha^3(F) \cdots$$

を $\bar{\mathcal{K}}$ と表すことにする．

$\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ 中の任意の拡大列 $\mathcal{F}$ とその colimit $\mathcal{C}$ に対して，$\alpha(\mathcal{C})$ が $\alpha(\mathcal{F})$ の colimit となる時に関手 α は連続であるという．そして，前節までの結果を利用することによって，任意の連続関手に対して，その不動点となる sheaf を構成することが可能となる．

定理 11. α を $\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ から $\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ への連続関手とした時，$\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ の diagram $\mathcal{K} = \{(e, p) : F \to \alpha(F)\}$ に対して，$\lim \bar{\mathcal{K}} \simeq \alpha(\lim \bar{\mathcal{K}})$ が成り立つ．

証明. 前節で示した構成に従って，拡大列 $\bar{\mathcal{K}}$ の colimit $\bar{\mathcal{K}}_\infty$ が得られ，$\lim \bar{\mathcal{K}}$ はその頂点である．この時，$\lim \bar{\mathcal{K}}$ から $\alpha(\lim \bar{\mathcal{K}})$ への射 $\alpha(\bar{\mathcal{K}}_\infty)^{\bar{\mathcal{K}}_\infty}$ と，$\alpha(\lim \bar{\mathcal{K}})$ から $\lim \bar{\mathcal{K}}$ への射 $\bar{\mathcal{K}}_\infty{}^{\alpha(\bar{\mathcal{K}}_\infty)}$ を

$$
\begin{aligned}
\alpha(\bar{\mathcal{K}}_\infty)^{\bar{\mathcal{K}}_\infty} &= \bigsqcup^{\uparrow} \{\alpha_e(e_{\bar{\mathcal{K}}n}, p_{n\bar{\mathcal{K}}}) \circ p_{n+1\,\bar{\mathcal{K}}} \mid n \in \mathbb{N}\} \\
\bar{\mathcal{K}}_\infty{}^{\alpha(\bar{\mathcal{K}}_\infty)} &= \bigsqcup^{\uparrow} \{e_{\bar{\mathcal{K}}\,n+1} \circ \alpha_p(e_{\bar{\mathcal{K}}n}, p_{n\bar{\mathcal{K}}}) \mid n \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}
$$

のように定義して，これらが isomorphism となっていることを示す．

先ず，定理 10 より，$\bar{\mathcal{K}}_\infty$ は $\bar{\mathcal{K}}$ の colimit であるから，定理 7 (i) より ${\bar{\mathcal{K}}_\infty}^{\bar{\mathcal{K}}_\infty} = \mathrm{id}_{\lim \bar{\mathcal{K}}}$ となる．従って，

$$\begin{aligned}
&{\bar{\mathcal{K}}_\infty}^{\alpha(\bar{\mathcal{K}}_\infty)} \circ \alpha(\bar{\mathcal{K}}_\infty)^{\bar{\mathcal{K}}_\infty} \\
&\quad = \bigsqcup{}^{\uparrow}\{e_{\bar{\mathcal{K}}\,m+1} \circ \alpha_p(e_{\bar{\mathcal{K}}\,m}, p_{m\,\bar{\mathcal{K}}}) \circ \alpha_e(e_{\bar{\mathcal{K}}\,n}, p_{n\,\bar{\mathcal{K}}}) \circ p_{n+1\,\bar{\mathcal{K}}} \mid m, n \in \mathbb{N}\} \\
&\quad = \bigsqcup{}^{\uparrow}\{e_{\bar{\mathcal{K}}\,n+1} \circ \alpha_p(e_{\bar{\mathcal{K}}\,n}, p_{n\,\bar{\mathcal{K}}}) \circ \alpha_e(e_{\bar{\mathcal{K}}\,n}, p_{n\,\bar{\mathcal{K}}}) \circ p_{n+1\,\bar{\mathcal{K}}} \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&\quad = {\bar{\mathcal{K}}_\infty}^{\bar{\mathcal{K}}_\infty} \\
&\quad = \mathrm{id}_{\lim \bar{\mathcal{K}}}
\end{aligned}$$

が得られる．また，α が連続関手であることから $\alpha(\bar{\mathcal{K}}_\infty)$ は拡大列 $\alpha(\bar{\mathcal{K}})$ の colimit となり，定理 7 (i) より $\alpha(\bar{\mathcal{K}}_\infty)^{\alpha(\bar{\mathcal{K}}_\infty)} = \mathrm{id}_{\alpha(\lim \bar{\mathcal{K}})}$ となる．従って，

$$\begin{aligned}
&\alpha(\bar{\mathcal{K}}_\infty)^{\bar{\mathcal{K}}_\infty} \circ {\bar{\mathcal{K}}_\infty}^{\alpha(\bar{\mathcal{K}}_\infty)} \\
&\quad = \bigsqcup{}^{\uparrow}\{\alpha_e(e_{\bar{\mathcal{K}}\,m}, p_{m\,\bar{\mathcal{K}}}) \circ p_{m+1\,\bar{\mathcal{K}}} \circ e_{\bar{\mathcal{K}}\,n+1} \circ \alpha_p(e_{\bar{\mathcal{K}}\,n}, p_{n\,\bar{\mathcal{K}}}) \mid m, n \in \mathbb{N}\} \\
&\quad = \bigsqcup{}^{\uparrow}\{\alpha_e(e_{\bar{\mathcal{K}}\,n}, p_{n\,\bar{\mathcal{K}}}) \circ p_{n+1\,\bar{\mathcal{K}}} \circ e_{\bar{\mathcal{K}}\,n+1} \circ \alpha_p(e_{\bar{\mathcal{K}}\,n}, p_{n\,\bar{\mathcal{K}}}) \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&\quad = \alpha(\bar{\mathcal{K}}_\infty)^{\alpha(\bar{\mathcal{K}}_\infty)} \\
&\quad = \mathrm{id}_{\alpha(\lim \bar{\mathcal{K}})}
\end{aligned}$$

が得られる． □

最後に，これまでの結果を利用して，category $\mathbf{Cpos}(X)$ において，(η 公理を持つ) 型無ラムダ計算のモデルに必要な条件 $F \simeq F^F$ を満たす対象 F の構成を行いたい．それには，任意の $F \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}})$ に対して $\tau(F) = F^F$ となるような $\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ から $\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ への連続関手 τ を与える必要がある．τ の射に関する定義については，$(e, p) \in \mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}(F, G)$ と $U \in \mathcal{O}X$ が与えられた時に，各 $h \in F^F(U)$ に対して

$$\tau_e(e, p)_U(h) = e|_U \circ h \circ p|_U$$

として $\tau(F)$ から $\tau(G)$ への natural transformation $\tau_e(e, p)$ を定義して，各 $h \in G^G(U)$ に対して

$$\tau_p(e, p)_U(h) = p|_U \circ h \circ e|_U$$

として $\tau(G)$ から $\tau(F)$ への natural transformation $\tau_p(e, p)$ を定義する．

実際に，こうして定義された関手 τ が連続であることは容易に確認できるので，定理 11 を適用して，その不動点を得ることができる．

補題 12. τ は連続関手である．

証明. $\mathcal{F} = \{(e_{n+1\,n},\, p_{n\,n+1}) : F_n \to F_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ を $\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ 中の拡大列として $\mathcal{C} = \{(f_n,\, q_n) : F_n \to C \mid n \in \mathbb{N}\}$ を $\mathcal{F}$ の colimit とする．この時，$\tau(\mathcal{C})$ は明らかに $\tau(\mathcal{F})$ の cocone であり，更に，任意の $U \in \mathcal{O}X$ と $h \in \tau(C)(U)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(\tau(\mathcal{C})^{\tau(\mathcal{C})})_U(h)\\
&= \bigsqcup\nolimits^{\uparrow}\{\, \tau_e(f_n, q_n)_U \circ \tau_p(f_n, q_n)_U(h) \mid n \in \mathbb{N}\}\\
&= \bigsqcup\nolimits^{\uparrow}\{\, f_n|_U \circ q_n|_U \circ h \circ f_n|_U \circ q_n|_U \mid n \in \mathbb{N}\}\\
&= \left(\bigsqcup\nolimits^{\uparrow}\{f_n|_U \circ q_n|_U \mid n \in \mathbb{N}\}\right) \circ h \circ \left(\bigsqcup\nolimits^{\uparrow}\{f_n|_U \circ q_n|_U \mid n \in \mathbb{N}\}\right)\\
&= h \qquad \text{(補題6より)}
\end{aligned}
$$

が成り立っている．従って $\tau(\mathcal{C})^{\tau(\mathcal{C})} = \mathrm{id}_{\tau(C)}$ であり，定理 7 (i) から，$\tau(\mathcal{C})$ が $\tau(\mathcal{F})$ の colimit となることが分かる． □

定理 13. $\mathbf{Cpos}(X)^{\mathrm{ep}}$ 中の diagram $\mathcal{K} = \{(e, p) : F \to \tau(F)\}$ に対して $\lim \bar{\mathcal{K}} \simeq (\lim \bar{\mathcal{K}})^{\lim \bar{\mathcal{K}}}$ が成り立つ．

この定理において得られた同型対応について，$\lim \bar{\mathcal{K}}$ から $(\lim \bar{\mathcal{K}})^{\lim \bar{\mathcal{K}}}$ への射は $\tau(\bar{\mathcal{K}}_\infty)^{\bar{\mathcal{K}}_\infty}$ で与えられていて，任意の $U \in \mathcal{O}X$ と $x \in (\lim \bar{\mathcal{K}})(U)$ に対して

$$(\tau(\bar{\mathcal{K}}_\infty)^{\bar{\mathcal{K}}_\infty})_U(x) = \bigsqcup\nolimits^{\uparrow}\{\, e_{\bar{\mathcal{K}}\,n}|_U \circ x_{n+1} \circ p_{n\,\bar{\mathcal{K}}}|_U \mid n \in \mathbb{N}\}$$

が成り立っている．また，$(\lim \bar{\mathcal{K}})^{\lim \bar{\mathcal{K}}}$ から $\lim \bar{\mathcal{K}}$ への射は $\bar{\mathcal{K}}_\infty{}^{\tau(\bar{\mathcal{K}}_\infty)}$ で与えられて，任意の $U \in \mathcal{O}X$ と $x \in (\lim \bar{\mathcal{K}})^{\lim \bar{\mathcal{K}}}(U)$ に対して

$$(\bar{\mathcal{K}}_\infty{}^{\tau(\bar{\mathcal{K}}_\infty)})_U(x) = \bigsqcup\nolimits^{\uparrow}\{\, (e_{\bar{\mathcal{K}}\,n+1})_U(p_{n\,\bar{\mathcal{K}}}|_U \circ x \circ e_{\bar{\mathcal{K}}\,n}|_U) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

が成り立っている．

参考文献

[1] S. Abramsky and A. Jung, Domain Theory, in S. Abramsky, D. M. Gabbay and T. S. E. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science: volume 3 Semantic Structures*, Oxford Science Publications, 1994.

[2] A. Asperty and G. Longo, *Categories, Types and Structures: An Introduction to Category Theory for the Working Computer Scientist*, MIT press, 1991.

[3] H. P. Barendregt, *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*, North-Holland, 1984.

[4] M. P. Fourmanl and D. S. Scott, Sheaves and Logic, *Lecture Notes in Mathematics* 92, pp. 302–401, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[5] C. A. Gunter, *Semantics of Programming Languages: Structures and Techniques*, Foundations of Computing series, MIT Press, 1992.

[6] R. Goldblatt, *Topoi: The Categorical Analysis of Logic* (Revised Edition), Studies in Logic and the Foundations of Mathematics Volume 98, North-Holland, 1984.

[7] J. R. Hindley, *Basic Simple Type Theory*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 47, Cambridge University Press, 1997.

[8] J. R. Hindley and J. P. Seldin, *Introduction to combinators and λ-calculus*, London Mathematical Society Student Texts 1, Cambridge University Press, 1986.

[9] J. Lambek and P. J. Scott, *Introduction to higher order categorical logic*, Cambridge studies in advanced mathematics 7, Cambridge University Press, 1986.

[10] S. Mac Lane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic:A First Introduction to Topos Theory*, Springer-Verlag, 1992.

[11] D. S. Scott, Continuous Lattices, in E. Lawvere editor, *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, Lecture Notes in Mathematics 274, pp. 97–136, Springer-Verlag, Berlin, 1972.